УДК 515.124.4

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ N-РАДИУС ОГРАНИЧЕННОГО МНОЖЕСТВА МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

Е.Н. Сосов

Аннотация

В работе исследуются свойства наилучшего радиуса аппроксимации ограниченного множества метрического пространства N-сетями из другого множества. Получена оценка сверху разности между такими радиусами двух ограниченных множеств с помощью расстояний по Хаусдорфу между рассматриваемыми множествами. В случае ограниченных метрических пространств для оценок используются расстояние по Громову – Хаусдорфу и более простое по объему вычислений расстояние между этими пространствами.

Ключевые слова: метрическое пространство, относительный N-радиус, псевдометрика Хаусдорфа, расстояние Громова – Хаусдорфа.

---

1. Необходимые определения и полученные результаты

В работе мы используем следующие обозначения и определения: $\mathbb{N}$ ($\mathbb{R}_+$) – множество всех натуральных (неотрицательных вещественных) чисел; $B(X)$ – множество всех непустых ограниченных множеств метрического пространства (X, ρ) с расстоянием $|xy| = \rho(x,y)$ для x, $y \in X$. $|xW| = \inf\{|xy| : y \in W\}$, $\beta(M,W) = \sup\{|xW| : x \in M\}$ – отклонение множества $M \in B(X)$ от непустого множества $W \subset X$ [1, с. 223]. $\alpha : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$, $\alpha(M,W) = \max\{\beta(M,W); \beta(W,M)\}$ – **псевдометрика Хаусдорфа** на $B(X)$ [1, с. 223]; $D(M,W) = \sup\{\rho(x,y) : x \in M, y \in W\}$ для $M, W \in B(X)$; $D(M) = D(M,M)$ – диаметр множества $M \in B(X)$.

Отметим, что для любых $M, W \in B(X)$ верно неравенство $\alpha(M,W) \leq D(M,W)$ и функция $D : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет неравенству треугольника.

Пусть $\operatorname{card}(S)$ – мощность множества S и $N \in \mathbb{N}$. Назовем число

$$R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M,S) : S \subset W, 1 \leq \operatorname{card}(S) \leq N\}$$

относительным N-радиусом множества $M \in B(X)$ относительно непустого множества $W \subset X$. Если $W = X$, то $R_{NX}(M)$ – **наилучший радиус аппроксимации** N-сетями пространства X множества $M \in B(X)$ [3]. **Наилучшей N-сетью** множества $M \in B(X)$ называется такое множество $S^*_{NX}(M) \subset X$ [3], что

$$1 \leq \operatorname{card}(S^*_{NX}(M)) \leq N \quad \text{и} \quad \beta(M, S^*_{NX}(M)) = R_{NX}(M).$$

Оценим сверху разность между относительными N-радиусами двух ограниченных множеств с помощью отклонений между рассматриваемыми множествами. Тогда в качестве следствия мы получим оценку этой разности с помощью расстояний по Хаусдорфу между рассматриваемыми множествами. Такие задачи в частном случае относительных чебышевских радиусов исследовались в [4–8].

Теорема 1. *Пусть* M, W, A, $B \in B(X)$. *Тогда*

$$(i) \qquad |R_{NW}(M) - R_{NB}(A)| \le \max\{\beta(M,A) + \beta(B,W), \beta(A,M) + \beta(W,B)\}$$

для каждого $N \in \mathbb{N}$;

$$(ii) \qquad |D(M,W) - D(A,B)| \le \max\{\min\{\beta(M,A) + \beta(W,B), \beta(M,B) + \beta(W,A)\},$$

$$\min\{\beta(A,M) + \beta(B,W), \beta(A,W) + \beta(B,M)\}\}.$$

Следствие 1. *Пусть* M, W, A, $B \in B(X)$. *Тогда*

$$\sup_{N\in\mathbb{N}} |R_{NW}(M) - R_{NB}(A)| \le \alpha(M,A) + \alpha(W,B); \tag{1}$$

$$|D(M) - D(A)| \le 2\alpha(M,A). \tag{2}$$

Последнее неравенство для диаметра ограниченного множества хорошо известно, см. упражнение 7.3.14 из [2, с. 305].

Напомним также необходимые определения из [2, с. 303, 306].

Бинарное, отношение $\mathbf{R} \subset X \times Y$ называется **соответствием между множествами** X и Y, если для любых $x \in X$ и $y \in Y$ найдутся такие $v \in Y$ и $u \in X$, что (x,v), $(u,y) \in \mathbf{R}$. Соответствие $\mathbf{R}$ ассоциировано с сюръекцией $f : X \to Y$, если

$$\mathbf{R} = \{(x, f(x)) : x \in X\}. \tag{3}$$

Искажением соответствия $\mathbf{R}$ между ограниченными метрическими пространствами (X, d_X) и (Y, d_Y) называется число

$$\operatorname{dis}\mathbf{R} = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(y,y')| : (x,x'), (y,y') \in \mathbf{R}\}. \tag{4}$$

Расстояние Громова – Хаусдорфа $d_{GH}(X,Y)$ между двумя ограниченными метрическими пространствами (X,d_X) и (Y,d_Y) есть точная нижняя грань таких чисел $r > 0$, для которых найдется псевдометрика d на дизъюнктном объединении $X \cup Y$ такая, что ограничения d на X и Y совпадает с d_X и d_Y соответственно, а также $\alpha(X,Y) < r$ на пространстве $(X \cup Y, d)$.

В [2, с. 306] доказано, что расстояние Громова – Хаусдорфа между ограниченными метрическими пространствами (X,d_X) и (Y,d_Y) может быть выражено также следующим внутренним образом:

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis}\mathbf{R} : \mathbf{R} - \text{соответствие между } X \text{ и } Y\}. \tag{5}$$

Из определения расстояния Громова – Хаусдорфа и следствия 1 получим

Следствие 2. *Пусть* X *и* Y *– ограниченные метрические пространства. Тогда*

$$\max\{|D(X) - D(Y)|, \sup_{N\in\mathbb{N}} |R_{NX}(X) - R_{NY}(Y)|\} \le 2d_{GH}(X,Y). \tag{6}$$

Назовем соответствие $\mathbf{R}$ между множествами X и Y выделенным, если оно ассоциировано или с сюръекцией $f : X \to Y$, или с сюръекцией $g : Y \to X$.

Задача вычисления расстояния Громова – Хаусдорфа между конкретными ограниченными метрическими пространствами (X,d_X) и (Y,d_Y) с помощью соответствий обычно приводит к большому объему вычислений, поэтому иногда удобнее ввести расстояние

$$d_s(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis}\mathbf{R} : \mathbf{R} - \text{выделенное соответствие между } X \text{ и } Y\}. \tag{7}$$

Очевидно, что расстояние d_s симметрично и для любых ограниченных метрических пространств (X, d_X) и (Y, d_Y)

$$d_{GH}(X,Y) \le d_s(X,Y). \tag{8}$$

Следующее предложение 1 показывает, что это расстояние так же, как и расстояние Громова – Хаусдорфа, удовлетворяет неравенству треугольника.

Предложение 1. *Пусть (X, d_X), (Y, d_Y) и (Z, d_Z) – ограниченные метрические пространства. Тогда имеет место неравенство*

$$d_s(X,Y) \le d_s(X,Z) + d_s(Z,Y). \tag{9}$$

Отметим, что в случае, когда $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$

$$d_s(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} f : f : X \to Y - \text{биекция}\}, \tag{10}$$

где $\operatorname{dis} f = \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x')| : x, x' \in X\}$ – **искажение биекции** f. Следовательно, в этом случае верна следующая грубая оценка

$$d_s(X,Y) \le \frac{1}{2}(\max\{D(X), D(Y)\} - \min\{m(X), m(Y)\}), \tag{11}$$

где, например, $m(X) = \inf\{|xy| : x, y \in X, x \neq y\}$. Некоторые иные свойства искажения отображения можно найти в [2, с. 297].

Пример 1. Пусть $M = \{0,1,2,10\}$, $W = \{0,1,9,10\}$ – подпространства множества вещественных чисел со стандартной метрикой. Тогда нетрудно вычислить, что

$$d_{GH}(M,W) = 0.5 < \alpha(M,W) = 1 < 3.5 = d_s(M,W).$$

В следующем предложении 2 выделяются некоторые простые аппроксимативные свойства N-сетей для ограниченных множеств метрических пространств. Условия предложения 2 выполнены в случае, когда рассматриваемые множества компактны.

Предложение 2. *Пусть M, $A \in B(X)$, $W \in B(Y)$ и существуют наилучшие N-сети $\widetilde{S}^*_{NX}(M)$, $\widetilde{S}^*_{NX}(A)$, $\widetilde{S}^*_{NY}(W)$. Тогда найдутся такие наилучшие N-сети $S^*_{NX}(M)$, $S^*_{NX}(A)$, $S^*_{NY}(W)$, что*

(i) $\alpha(M, S^*_{NX}(M)) = R_{NX}(M)$,

$$|\alpha(M,A) - \alpha(S^*_{NX}(M), S^*_{NX}(A))| \le R_{NX}(M) + R_{NX}(A);$$

(ii) $d_{GH}(M, S^*_{NX}(M)) \le R_{NX}(M)$,

$$|d_{GH}(M,W) - d_{GH}(S^*_{NX}(M), S^*_{NY}(W))| \le R_{NX}(M) + R_{NY}(W);$$

(iii) $d_s(M, S^*_{NX}(M)) \le R_{NX}(M)$,

$$|d_s(M,W) - d_s(S^*_{NX}(M), S^*_{NY}(W))| \le R_{NX}(M) + R_{NY}(W).$$

Замечание 1. Учитывая полученные свойства, можно сделать вывод о возможности использования расстояния d_s для (метрического) распознавания компактов. Нетрудно понять, что задача такого распознавания зависит от объема вычислений расстояния d_s (или его оценок) между конечными множествами фиксированной мощности N и алгоритм вычисления этого расстояния должен содержать не меньше, чем $N!$ вычислительных операций, поскольку $N!$ – число биекций одного множества из N элементов на другое множество. Для достаточно больших N проще подсчитать диаметры и несколько относительных радиусов этих множеств, а также воспользоваться следствием 2 (и тем свойством, что d_s не меньше расстояния Громова – Хаусдорфа между теми же множествами), чтобы в случае ненулевой величины в левой части неравенства не вычислять более сложное расстояние d_s. Это показывает прикладное значение оценок снизу расстояния d_s.

Замечание 2. Нетрудно проверить, что при $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \in \{1,2,3\}$, справедливо равенство

$$\max\{|D(X) - D(Y)|, |R_{1X}(X) - R_{1Y}(Y)|, |R_{2X}(X) - R_{2Y}(Y)|\} = 2d_s(X,Y). \quad (12)$$

Это очевидно, если $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \in \{1,2\}$. Если $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) = 3$, можно провести простое доказательство от противного, рассмотрев каждую из шести биекций X на Y. Следовательно, при $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \in \{1,2,3\}$ в следствии 2 на самом деле равенство, но уже при общей мощности равной четырем неравенство (6) строгое.

Пример 2. Пусть A, B – два множества вершин прямоугольников в евклидовой плоскости с длинами сторон a_1, a_2 и b_1, b_2 соответственно и диагоналями $a_3 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $b_3 = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$. Тогда элементарный, но утомительный расчет приведет к равенству

$$d_s(A,B) = \frac{1}{2}\min\{\max\{|a_1 - b_{\sigma(1)}|, |a_2 - b_{\sigma(2)}|, |a_3 - b_{\sigma(3)}|\} : \sigma \in S(3)\}, \quad (13)$$

где $S(3)$ – группа всех подстановок трех элементов. Можно также проверить, что $d_{GH}(A,B) = d_s(A,B)$. Уже в этом простом случае проверка ясно покажет, что вычислять $d_{GH}(A,B)$ намного сложнее, чем $d_s(A,B)$. Пусть теперь $a_1 = 9$, $a_2 = b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Тогда неравенство (6) является строгим:

$$\sqrt{85} - \sqrt{5} < 7.$$

Пример 2 также показывает, что имеются метрические инварианты, отличные от тех, которые содержатся в левой части неравенства (6), но это предмет дальнейших исследований.

Для конечных метрических пространств X, Y одной мощности $N > 1$ имеется следующая простая оценка снизу расстояния $d_s(X,Y)$:

$$|\sigma_N(X) - \sigma_N(Y)| \le 2d_s(X,Y), \quad (14)$$

где, например,

$$\sigma_N(X) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{x,\, y \in X} |xy|. \quad (15)$$

Отметим также, что некоторые относительные K-радиусы множества X, где $\operatorname{card}(X) = N > 1$, $1 \le K \le N-1$, могут быть вычислены иным способом. Например, нетрудно установить, что $R_{(N-1)X}(X) = m(X)$ – длина минимального ребра полного графа X, а если $N > 2$, то $R_{(N-2)X}(X)$ – длина минимального ребра графа, полученного из полного графа X удалением одного ребра минимальной длины. Таким образом, для конечных метрических пространств X, Y одной мощности $N > 2$ можно указать следующую полезную оценку с относительно просто вычислимой левой частью:

$$\max\{|\sigma_N(X) - \sigma_N(Y)|, |D(X) - D(Y)|, |R_{1X}(X) - R_{1Y}(Y)|,$$

$$|R_{(N-2)X}(X) - R_{(N-2)Y}(Y)|, |m(X) - m(Y)|\} \leq 2d_s(X, Y).$$

Для проведения вычислительного эксперимента автором на встроенном языке математического пакета Maxima-5.23.2 была написана программа для оптимального вычисления левой и правой частей этого неравенства для двух произвольных множеств одной мощности $N > 2$ из $\mathbb{R}^3$. Выяснилось, что компьютер с оперативной памятью 1 Гб и процессором 2 ГГц быстро считает правую часть лишь при $2 < < N \leq 9$ (при $N = 9$ среднее время вычисления правой части – около 10 мин, а левой части – около 2 с), то есть для быстрого вычисления правой части уже при $N = 15$ нужен современный суперкомпьютер.

2. Доказательства результатов

Доказательство Теоремы 1. Пусть $M, W, A, B \in B(X)$, $N \in \mathbb{N}$.

(i) Выберем произвольно $S_B \subset B$, где $1 \leq \mathrm{card}\,(S_B) \leq N$, и запишем неравенство треугольника для отклонения Хаусдорфа

$$\beta(M, S_B) \leq \beta(M, A) + \beta(A, S_B).$$

Взяв точную нижнюю грань по всем $S_B \subset B$ $(1 \leq \mathrm{card}\,(S_B) \leq N)$ сначала в левой, а затем в правой части этого неравенства, получим

$$R_{NB}(M) \leq \beta(M, A) + R_{NB}(A). \tag{16}$$

Докажем вспомогательное равенство

$$\beta(S_B, W) = \inf\{\beta(S_B, S) :\, S \subset W, 1 \leq \mathrm{card}\,(S) \leq N\}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Для каждого $y \in S_B$ найдется такой элемент $w_y \in W$, что

$$|yw_y| < |yW| + \varepsilon.$$

Тогда $1 \leq \mathrm{card}\,(S_W) \leq N$, где $S_W = \{w_y : y \in S_B\}$. Кроме того, для каждого $y \in S_B$

$$|yS_W| \leq |yw_y| < |yW| + \varepsilon \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon.$$

Требуемое вспомогательное равенство можно теперь получить, если в следующих неравенствах

$$\beta(S_B, W) \leq \inf\{\beta(S_B, S) :\, S \subset W, 1 \leq \mathrm{card}\,(S) \leq N\} \leq \beta(S_B, S_W) \leq \beta(S_B, W) + \varepsilon$$

перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Используем полученное равенство для доказательства еще одного вспомогательного неравенства

$$R_{NW}(M) \leq \beta(B, W) + R_{NB}(M). \tag{17}$$

Действительно, если в правой части неравенств

$$\begin{aligned} R_{NW}(M) = \inf\{\beta(M, S) :\, S \subset W, 1 \leq \mathrm{card}\,(S) \leq N\} \ \leq \\ \leq\ \beta(M, S_B) + \inf\{\beta(S_B, S) :\, S \subset W, 1 \leq \mathrm{card}\,(S) \leq N\} \ = \\ =\ \beta(M, S_B) + \beta(S_B, W) \leq \beta(M, S_B) + \beta(B, W) \end{aligned}$$

взять инфимум по всем $S_B \subset B$ $(1 \le \operatorname{card}(S_B) \le N)$, то получим неравенство (17). Используя доказанные неравенства (16) и (17), получим

$$\begin{aligned} R_{NW}(M) - R_{NB}(A) \ &\le \\ &\le \ R_{NW}(M) - R_{NB}(M) + R_{NB}(M) - R_{NB}(A) \le \beta(B,W) + \beta(M,A), \end{aligned}$$

Из полученного неравенства и произвольности $M,\ W,\ A,\ B \in B(X)$ следует требуемое неравенство (i).

(ii) Выберем произвольно $x \in M$, $y \in W$, $a \in A$, $b \in B$. Применим неравенство треугольника

$$|xy| \le \min\{|xa| + |ab| + |by|, |xb| + |ba| + |ay|\} \le \min\{|xa| + |by|, |xb| + |ay|\} + D(A,B).$$

Возьмем в правой части последнего неравенства инфимум по всем $a \in A$, $b \in B$. Тогда получим

$$\begin{aligned} |xy| \le \min\{|xA| + |yB|, |xB| + |yA|\} + D(A,B) \ &\le \\ &\le \ \min\{\beta(M,A) + \beta(W,B), \beta(M,B) + \beta(W,A)\} + D(A,B). \end{aligned}$$

Взяв теперь в левой части этого неравенства точную верхнюю грань по всем $x \in M$, $y \in W$, имеем

$$D(M,W) - D(A,B) \le \min\{\beta(M,A) + \beta(W,B), \beta(M,B) + \beta(W,A)\}.$$

Из этого неравенства в силу произвольности $M,\ W,\ A,\ B \in B(X)$ следует требуемое неравенство (ii).

$\square$

Доказательство Предложения 1. Пусть для определенности существует сюръекция из множества X на множество Y. Тогда достаточно рассмотреть следующие три случая.

1. Пусть существуют сюръекции из множества X на множество Z и из множества Z на множество Y, то есть

$$\operatorname{card}(X) \ge \operatorname{card}(Z) \ge \operatorname{card}(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $f : X \to Y$ в виде композиции сюръекций $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$. Тогда для любых $x,\ x' \in X$

$$\begin{aligned} |d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x'))| \le |d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| \ &+ \\ + \ |d_Z(g(x), g(x')) - d_Y(h(g(x)), h(g(x')))| \ &\le \\ \le \ \sup\{|d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x,\ x' \in X\} \ &+ \\ + \ \sup\{|d_Z(z,z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z,\ z' \in Z\}&. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|d_X(x,x') - d_Y(f(x), f(x')| : x,\ x' \in X\} \ &\le \\ \le \ \sup\{|d_X(x,x') - d_Z(g(x), g(x'))| : x,\ x' \in X\} \ &+ \\ + \ \sup\{|d_Z(z,z') - d_Y(h(z), h(z'))| : z,\ z' \in Z\}&. \end{aligned}$$

Взяв сначала точную нижнюю грань по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем точные нижние грани по всем сюръекциям $g : X \to Z$ и $h : Z \to Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

2. Пусть существует сюръекция из множества Z на множество X. Тогда,

$$\mathrm{card}\,(Z) \geq \mathrm{card}\,(X) \geq \mathrm{card}\,(Y).$$

Представим произвольную сюръекцию $h : Z \to Y$ в виде композиции сюръекций $g : Z \to X$ и $f : X \to Y$. Тогда для любых $z,\ z' \in Z$

$$\begin{aligned} |d_X(g(z), g(z')) - d_Y(f(g(z)), f(g(z')))| \leq |d_X(g(z), g(z')) - d_Z(z, z')| + \\ + \ |d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| \leq \sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| :\ z,\ z' \in Z\} + \\ + \ \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| :\ z,\ z' \in Z\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x')| :\ x,\ x' \in X\} \ \leq \\ \leq \ \sup\{|d_Z(z, z') - d_X(g(z), g(z'))| :\ z,\ z' \in Z\} + \\ + \ \sup\{|d_Z(z, z') - d_Y(h(z), h(z'))| :\ z,\ z' \in Z\}. \end{aligned}$$

Взяв сначала точную нижнюю грань по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем точные нижние грани по всем сюръекциям $g : Z \to X$ и $h : Z \to Y$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство.

3. Пусть существует сюръекция множества Y на множество Z. Тогда,

$$\mathrm{card}\,(X) \geq \mathrm{card}\,(Y) \geq \mathrm{card}\,(Z).$$

Представим произвольную сюръекцию $g : X \to Z$ в виде композиции сюръекций $f : X \to Y$ и $h : Y \to Z$. Тогда для любых $x,\ x' \in X$

$$\begin{aligned} |d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x'))| \leq |d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| + \\ + \ |d_Z(h(f(x)), h(f(x'))) - d_Y(f(x), f(x'))| \leq \\ \leq \ \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| :\ x,\ x' \in X\} + \\ + \ \sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(h(y), h(y'))| :\ y,\ y' \in Y\}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sup\{|d_X(x, x') - d_Y(f(x), f(x')| :\ x,\ x' \in X\} \ \leq \\ \leq \ \sup\{|d_X(x, x') - d_Z(g(x), g(x'))| :\ x,\ x' \in X\} + \\ + \ \sup\{|d_Y(y, y') - d_Z(h(y), h(y'))| :\ y,\ y' \in Y\}. \end{aligned}$$

Взяв сначала точную нижнюю грань по всем сюръекциям $f : X \to Y$ в левой части полученного неравенства, а затем точные нижние грани по всем сюръекциям $g : X \to Z$ и $h : Y \to Z$ в правой части неравенства, получим требуемое неравенство. $\square$

Доказательство Предложения 2. (i) Пусть

$$S = \{x \in \widetilde{S}^*_{NX}(M) :\ \alpha(M, S^*_{NX}(M)) > R_{NX}(M)\}.$$

Тогда первому равенству удовлетворяет N-сеть $S^*_{NX}(M) = \widetilde{S}^*_{NX}(M)\backslash S$. Аналогично находим $S^*_{NX}(A)$. Второе неравенство следует теперь из неравенств

$$|\alpha(M,A) - \alpha(S^*_{NX}(M), S^*_{NX}(A))| \le \\ \le \alpha(M, S^*_{NX}(M)) + \alpha(A, S^*_{NX}(A)) = R_{NX}(M) + R_{NX}(A).$$

(ii) Из доказанного равенства $\alpha(M, S^*_{NX}(M)) = R_{NX}(M)$ и определения расстояния Громова – Хаусдорфа следует неравенство $d_{GH}(M, S^*_{NX}(M)) \le R_{NX}(M)$. Доказательство второго неравенства теперь получается по тому же способу, который изложен в пункте (i).

(iii) Пусть отображение $P : M \to \widetilde{S}^*_{NX}(M)$ сопоставляет каждому $x \in M$ некоторый элемент множества

$$\widetilde{S}^*_{NX}(M) \cap B[x, |x\widetilde{S}^*_{NX}(M)|],$$

где $B[x, |x\widetilde{S}^*_{NX}(M)|]$ – замкнутый шар с центром в точке x радиуса $|x\widetilde{S}^*_{NX}(M)|$. Положим $S^*_{NX}(M) = P(M)$. Тогда

$$d_s(M, S^*_{NX}(M)) \le \frac{1}{2}\sup\{||xx'| - |P(x)P(x')|| : x,\, x' \in M\} \le \\ \le \frac{1}{2}\sup\{|xP(x)| + |x'P(x')| : x,\, x' \in M\} \le \beta(M, S^*_{NX}(M)) = R_{NX}(M).$$

Доказательство второго неравенства теперь получается по тому же способу, который изложен в пункте (i).

□

Summary

E.N. Sosov. Relative N-Radius of a Bounded Subset of a Metric Space.

In the present paper, we study properties of the best radius of approximation of a bounded subset of a metric space by N-nets from another set. We obtain an upper bound of the difference of such radii using the Hausdorff distances between the sets under consideration. In the case of bounded metric spaces, the Gromov – Hausdorff distances and a more simple (in terms of amount of calculations) distance between these spaces are used for estimation.

Key words: metric space, relative N-radius, Hausdorff pseudometric, Gromov – Hausdorff distance.

Литература

1. *Куратовский К.* Топология. Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
2. *Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В.* Курс метрической геометрии. – М.; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2004. – 496 с.
3. *Гаркави А.Л.* О наилучшей сети и наилучшем сечении множеств в нормированном пространстве // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962. – Т. 26, № 1. – С. 87–106.
4. *Wisnicki A., Wosko J.* On relative Hausdorff measures of noncompactness and relative Chebyshev radii in Banach spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124, No 8. – P. 2465–2474.
5. *Сосов Е.Н.* Относительный чебышевский центр конечного множества геодезического пространства // Изв. вузов. Матем. – 2008. – № 4. – С. 66–72.

6. *van Dulst D., Sims B.* Fixed points of nonexpansive mappings and Chebyshev centers in Banach spaces with norms of type (KK) // Banach space theory and its applications. Lecture Notes in Math. – Springer-Verlag, 1983. – V. 991/1893. – P. 35–43.

7. *Rao T.S.S.R.K.* Chebyshev centres and centrable sets // Proc. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 130, No 9. – P. 2593–2598.

8. *Bandyopadhyay P., Dutta S.* Weighted Chebyshev Centres and Intersection Properties of Balls in Banach Spaces // Contemp. Math. – 2003. – V. 328. – P. 43–58.

Поступила в редакцию
02.03.11

Сосов Евгений Николаевич – доктор физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского (Приволжского) федерального университета.

E-mail: *Evgenii.Sosov@ksu.ru*